数理解析研究所講究録 1458 巻 2005 年 71-79

EXTENSIONS OF PUTNAM'S INEQUALITY

M. CHŌ, S.M. PATEL, K. TANAHASHI[1], A. UCHIYAMA

ABSTRACT. Putnam 不等式をクラス A, クラス $A(s,t)$ 作用素 $(0 < s, t \leq 1)$ に拡張する。

1. 歴史

T がヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の hyponormal 作用素

$$0 \leq T^*T - TT^*$$

のとき

$$\begin{aligned}\|T^*T - TT^*\| &\leq \frac{1}{\pi}\text{meas }(\sigma(T)) \\ &= \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r dr d\theta\end{aligned}$$

が成立するというのが Putnam 不等式 ([12]) である。この不等式は強力で、例えばスペクトラムが実数であれば T は自己共役で、単位円内にあればユニタリであることがわかる。

この不等式をもっと広い作用素に拡張しようという試みは多くの数学者が行っている。例えば、semi-hyponormal 作用素

$$0 \leq (T^*T)^{1/2} - (TT^*)^{1/2}$$

については、Xia ([17]) の結果が、また、p-hyponormal 作用素

$$0 \leq (T^*T)^p - (TT^*)^p$$

については、長、伊藤 ([3]) の結果が知られている。

[命題 1 (Xia, 長、伊藤)]
T が p-hyponormal 作用素 $(0 < p \leq 1)$ ならば

$$\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| \leq \frac{p}{\pi}\iint_{\sigma(T)} r^{2p-1} dr d\theta$$

が成り立つ。

[1] This research was supported by Grant-in-Aid Research No. 15540180
2000 *Mathematics Subject Classification.* 47B20.
Key words and phrases. Putnam inequality, class A operator.

[略証] $T = U|T|$ と極分解する。ここで $S = U|T|^p$ とおくと S は hyponormal 作用素なので

$$\|S^*S - SS^*\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(S)} r dr d\theta$$

となる。また

$$\sigma(S) = \sigma(U|T|^p) = \{\rho^p e^{i\theta} : \rho e^{i\theta} \in \sigma(T)\}$$

であるから

$$\rho^p e^{i\theta} = re^{i\theta} \in \sigma(S)$$

とおけば

$$\begin{aligned}\|(T^*T)^p - (TT^*)^p\| &\leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} \rho^p \cdot p\rho^{p-1} d\rho d\theta \\ &= \frac{p}{\pi} \iint_{\sigma(T)} \rho^{2p-1} d\rho d\theta\end{aligned}$$

が得られる。 **[証明終]**

さて、上の不等式で $p = 1$ の場合が hyponormal 作用素の Putnam 不等式であるが、ここで $p \to +0$ にしたらどうなるかを考えてみよう。T が p-hyponormal 作用素のとき Löwner-Heinz 不等式から T は q-hyponormal $(0 < q < p)$ である。よって

$$\left\| \frac{(T^*T)^p - I}{p} - \frac{(TT^*)^p - I}{p} \right\| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2p-1} dr d\theta$$

の式で $p \to +0$ としてよい。すると

$$\| \log(T^*T) - \log(TT^*) \| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

が得られる。棚橋 ([13]) はこの変形に気がついて log-hyponormal 作用素の Putnam 不等式を得た。

[命題 2 (棚橋)]
T が log-hyponormal 作用素、つまり、可逆で

$$0 \leq \log(T^*T) - \log(TT^*)$$

ならば

$$\| \log(T^*T) - \log(TT^*) \| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

が成り立つ。

次の簡単な証明は藤井による。

[略証（藤井）] $T = U|T|$ と極分解して Aluthge 変換

$$T(s) = |T|^s U |T|^{1-s} \text{ for } 0 < s < 1/2$$

を考える。このとき

(1) $T(s)$ は s-hyponormal 作用素である。

(2) $\sigma(T(s)) = \sigma(|T|^s U|T|^{1-s}) = \sigma(U|T|^{1-s}|T|^s) = \sigma(T)$

(3) $T(s) \to U|T| = T$ as $s \downarrow 0$.

(4) $T(s)^* \to |T|U^* = T^*$ as $s \downarrow 0$.

なので

$$\left\| \frac{(T(s)^*T(s))^s - I}{s} - \frac{(T(s)T(s)^*)^s - I}{s} \right\| \leq \iint_{\sigma(T(s))} r^{2s-1} dr d\theta$$

が成り立つ。ここで $s \downarrow 0$ とすると

$$\| \log(T^*T) - \log(TT^*) \| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{-1} dr d\theta$$

である。 [証明終]

Log-hyponormal 作用素のアイデアは安藤 ([2]) が最初のようで、安藤 ([2]) は log-hyponormal 作用素が paranormal であることを示している。ただ、log-hyponormal 作用素という言葉は使っていない。この言葉を最初に使ったのは、藤井、姫路、松本 ([5]) が最初であろう。彼らはもっと一般に f-hyponormal 作用素にも言及している。T が可逆な p-hyponormal 作用素ならば

$$0 \leq \frac{(T^*T)^p - I}{p} - \frac{(TT^*)^p - I}{p}$$

で $p \to +0$ として

$$0 \leq \log(T^*T) - \log(TT^*)$$

となる。この意味で log-hyponormal 作用素は 0-hyponormal 作用素ということができ、他にも 0-hyponormal 作用素と考えてよい性質をもつことがわかっている。ただ、p-hyponormal 作用素にならない log-hyponrmal 作用素があるので p-hyponormal 作用素の集合を考えるとき、すべての $0 < p$ に関する共通部分が log-hyponormal 作用素の集合となるわけではない。

2. クラス A, クラス $A(s,t)$ 作用素の Putnam 不等式

T がクラス A 作用素であるとは

$$|T|^2 \leq |T^2|$$

が成り立つときをいう。この定義は古田、伊藤、山崎 ([7]) による。彼らはクラス A 作用素が paranormal

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|$$

であることを示した。p-hyponormal, log-hyponormal 作用素はクラス A 作用素であることが知られている ([7, 8, 9])。これらの関係を明らかにするために次のような例を考える。

$0 < A, B$ として

$$T = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & \\ & B & 0 & & & \\ & & B & [0] & & \\ & & & A & 0 & \\ & & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

とおく。このとき

(1) T が p-hyponormal $\iff A^{2p} \geq B^{2p}$

(2) T が log-hyponormal $\iff \log A \geq \log B$

(3) T がクラス A 作用素 $\iff (BA^2B)^{1/2} \geq B^2$

となっている。この T を用いて次の例を作る。

[例 1. p-hyponormal, not $(p+\epsilon)$-hyponormal 作用素]

$$A = 3^{1/2p}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + 7^{1/2p}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2^{1/p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき T は p-hyponormal 作用素であるが、任意の $\epsilon > 0$ に対して $(p+\epsilon)$-hyponormal 作用素とはならない。

[例 2. log-hyponormal, not p-hyponormal 作用素]

$$\log A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{\frac{3}{2}} \\ \sqrt{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \log B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき T は log-hyponormal 作用素であるが、任意の $p > 0$ に対して p-hyponormal 作用素にはならない。

[例 3. class A, not log-hyponormal 作用素]

$$A = a\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく。このとき $A \not\geq B$ なので T は hyponormal 作用素でない。ここで a の値によって T がどのクラスにはいるか調べてみる。(以下の計算は Mathematica を用いた。)

(Case 1.) $a = 14.3, p = 0.05$ とおくと

$$A^{2p} = a^{2p}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + 2^{2p}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\geq \begin{pmatrix} 3^{2p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{2p}$$

となる。よって T は p-hyponormal 作用素 ($p = 0.05$) である。

(Case 2.) $a = 14.2, p = 0.05$ とおくと

$$A^{2p} = a^{2p}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} + 2^{2p}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$
$$\ngeq \begin{pmatrix} 3^{2p} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B^{2p}$$

なので T は p-hyponormal 作用素 ($p = 0.05$) でない。

(Case 3.) T が log-hyponormal 作用素 $\Longleftrightarrow a \geq 14.1119\ldots$

(Case 4.) $a = 6$ とおくと T はクラス A 作用素であるが、log-hyponormal 作用素でない。

(Case 5.) $a = 5$ なら T はクラス A 作用素でない。

次はクラス A 作用素の Putnam 不等式である。

[定理 1] クラス A 作用素 T の極分解を $T = U|T|$ として

$$T(1,1) = |T|U|T|$$

とおく。このとき

$$\| \, |T^2| - |T|^2 \, \| \leq \| \, |T(1,1)| - |T(1,1)^*| \, \|$$
$$\leq \frac{1}{\pi}\text{meas }(\sigma(T)) = \frac{1}{\pi}\iint_{\sigma(T)} dr d\theta$$

が成り立つ。さらに、もし meas $(\sigma(T)) = 0$ ならば T は normal 作用素である。

この証明のために伊藤、山崎 ([10]) の結果を準備する。

[補題 1（伊藤、山崎）]
正作用素 $0 \leq A, B$ と正数 $0 < p, r$ に対して、もし

$$B^r \leq (B^{\frac{r}{2}} A^p B^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}}$$

が成り立てば

$$A^p \geq (A^{\frac{p}{2}} B^r A^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$$

が成り立つ。

つまり A と B が交換し、p と r が交換すると、不等号 ” $\leq$ ” が ” $\geq$ ” になる。この逆は、無条件では成り立たないが、 $\ker A \subset \ker B$ なら成立することが示されている。

[定理 1 の証明]
T はクラス A 作用素なので

$$\begin{aligned}|T|^2 \leq |T^2| &= (T^*T^*TT)^{1/2} \\ &= \left(|T|U^*|T|^2U|T|\right)^{1/2} = |T(1,1)|\end{aligned}$$

である。よって

$$U|T|^2U^* \leq U\left(|T|U^*|T|^2U|T|\right)^{1/2}U^*$$

から

$$|T^*|^2 \leq \left(|T^*||T|^2|T^*|\right)^{1/2}$$

が得られる。ここで補題 1 から $(|T^*| \to |T|, p=1 \to r=1)$

$$\begin{aligned}|T|^2 &\geq \left(|T|\ |T^*|^2|T|\right)^{1/2} \\ &= \left(|T|U|T|^2U^*|T|\right)^{1/2} = |T(1,1)^*|\end{aligned}$$

なので

$$|T(1,1)^*| \leq |T|^2 \leq |T^2| = |T(1,1)|$$

となる。よって $T(1,1)$ は 1/2-hyponormal 作用素であるから

$$\begin{aligned}\|\ |T^2| - |T|^2\ \| &\leq \|\ |T(1,1)| - |T(1,1)^*|\ \| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma(T(1,1))} dr d\theta\end{aligned}$$

となる。ここで長、山崎 ([4]) の結果から

$$\begin{aligned}\sigma(T(1,1)) &= \sigma(|T|U|T|) \\ &= \sigma(U|T|^2) = \{\rho^2e^{i\theta}|\rho e^{i\theta} \in \sigma(T)\}\end{aligned}$$

なので $\rho^2e^{i\theta} = re^{i\theta} \in \sigma(T(1,1))$ とおけば

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\sigma(T(1,1))} dr d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma(T)} 2\rho d\rho d\theta = \frac{1}{\pi}\text{meas }(\sigma(T))$$

である。

さらに、もし meas $(\sigma(T)) = 0$ ならば $|T(1,1)| = |T(1,1)^*|$ なので $T(1,1)$ は normal 作用素である。よって後述の補題 2 から T は normal 作用素である。 **[証明終]**

次に、クラス $A(s,t)$ 作用素について考えよう。$T = U|T|$ と極分解して

$$T(s,t) = |T|^sU|T|^t$$

とおく。T がクラス $A(s,t)$ 作用素であるとは

$$|T|^{2t} \leq |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}}$$

が成り立つときをいう。この定義は藤井、中本ら ([6]) による最初の定義とは異なるが同値である。また、

(1) クラス A 作用素とクラス $A(1,1)$ 作用素は一致する。

(2) クラス $A(s,t)$ 作用素全体の集合は s,t が増加すると大きくなる。

(3) p-hyponormal, log-hyponormal 作用素は任意の正数 $0 < s,t$ に対してクラス $A(s,t)$ 作用素である。

(4) 逆に T が可逆で、任意の正数 $0 < s,t$ に対してクラス $A(s,t)$ 作用素ならば T は log-hyponormal 作用素である。

等の結果が示されている ([4, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 15])。従って、この意味でクラス $A(s,t)$ 作用素は log-hyponormal 作用素の「連続な拡張」であると考えてよかろう。次はクラス $A(s,t)$ 作用素の Putnam 不等式である。

[定理 2]
T はクラス $A(s,t)$ 作用素で $0 < t \le s$ とする。ここで $T(s,t) = |T|^s U |T|^t$ とおくと

$$\| \, |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} - |T|^{2t} \, \| \le \| \, |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} - |T(s,t)^*|^{\frac{2t}{s+t}} \, \| \le \frac{t}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2t-1} dr d\theta$$

が成り立つ。さらに、もし、 meas $(\sigma(T)) = 0$ ならば T は normal 作用素である。

証明のために次を準備する。

[補題 2 ([11])] $T = U|T|$ がクラス $A(s,t)$ 作用素で $T(s,t) = |T|^s U |T|^t$ が normal 作用素ならば T は normal 作用素である。

[定理 2 の証明]
T はクラス $A(s,t)$ 作用素なので

$$|T|^{2t} \le |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} = \left(|T|^t U^* |T|^{2s} U |T|^t \right)^{\frac{t}{s+t}}$$

となる。よって

$$U|T|^{2t}U^* \le U \left(|T|^t U^* |T|^{2s} U |T|^t \right)^{\frac{t}{s+t}} U^*$$

となり、従って

$$|T^*|^{2t} \le \left(U|T|^t U^* |T|^{2s} U |T|^t U^* \right)^{\frac{t}{s+t}} = \left(|T^*|^t |T|^{2s} |T^*|^t \right)^{\frac{t}{s+t}}$$

が得られる。ここで補題 1 から $(|T^*| \to |T|, s \to t)$

$$|T|^{2s} \ge \left(|T|^s |T^*|^{2t} |T|^s \right)^{\frac{s}{s+t}} = |T(s,t)^*|^{\frac{2s}{s+t}}$$

である。従って Löwner-Heinz 不等式から

$$|T(s,t)^*|^{\frac{2t}{s+t}} \leq |T|^{2t} \leq |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}}$$

となるので $T(s,t)$ は $\frac{t}{s+t}$-hyponormal 作用素である。従って

$$\| \, |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} - |T|^{2t} \, \| = \| \, |T(s,t)|^{\frac{2t}{s+t}} - |T(s,t)^*|^{\frac{2t}{s+t}} \, \|$$
$$\leq \frac{t}{\pi(s+t)} \iint_{\sigma(T(s,t))} r^{\frac{2t}{s+t}-1} dr d\theta$$

となるが、ここで [16] より

$$\sigma(T(s,t)) = \{\rho^{s+t}e^{i\theta} | \rho e^{i\theta} \in \sigma(T) \ \}$$

なので $\rho^{s+t}e^{i\theta} = re^{i\theta} \in \sigma(T(s,t))$ とおけば

$$\frac{t}{\pi(s+t)} \iint_{\sigma(T(s,t))} r^{\frac{2t}{s+t}-1} dr d\theta = \frac{t}{\pi} \iint_{\sigma(T)} \rho^{2t-1} d\rho d\theta$$

である。

さらに、もし meas $(\sigma(T)) = 0$ ならば $|T(s,t)| = |T(s,t)^*|$ なので $T(s,t)$ は normal 作用素である。よって補題 2 から T は normal 作用素である。 **[証明終]**

[注意] 定理 2 で $t = s = 1$ の場合が定理 1 である。また、$t = s = 1/2$ の場合 T は w-hyponormal 作用素と呼ばれる。ここでは $0 < t \leq s$ としたが $0 < s \leq t$ の場合は

$$\| \, |T(s,t)|^{\frac{2s}{s+t}} - |T|^{2s} \, \| \leq \| \, |T(s,t)|^{\frac{2s}{s+t}} - |T(s,t)^*|^{\frac{2s}{s+t}} \, \|$$
$$\leq \frac{s}{\pi} \iint_{\sigma(T)} r^{2s-1} dr d\theta$$

となる。

また、ここでは $0 < s, t \leq 1$ としたが $1 < s$ または $1 < t$ の場合にこの結果が成立するかどうかは未解決である。この証明で問題となる部分はスペクトラムの計算である。もし

$$(T - z)x_n \to 0 \quad (z \neq 0)$$

から

$$(T - z)^* x_n \to 0$$

が成立するなら定理 2 の結果が成立する (参照 [14, 15, 16])。従って上の条件を確かめることが解決の鍵となるがこれは難しいようで今後の課題である。

References

[1] A. Aluthge, *On p-hyponormal operators for* $0 < p < 1$, Integr. Equat. Oper. Th., **13**(1990), 307–315.

[2] T. Ando, *Operators with a norm condition,* Acta Sci. Math. (Szeged), **33**(1972), 169–178.

[3] M.Chō and M. Itoh, *Putnam's inequality for p-hyponormal operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **123** (1995) 2435–2440.

[4] M.Chō and T. Yamazaki, *An operator transform from class A to the class of hyponormal operators and its applications,*

[5] M. Fujii, C. Himeji and A. Matsumoto, *Theorems od Ando and Saito for p-hyponormal operators,* Math. Japonica, **39** (1994) 595–598.

[6] M. Fujii, D. Jung, S.H. Lee, M.Y. Lee and R. Nakamoto, *Some classes of operators related to paranormal and log-hyponormal operators,* Math. Japonica, **51** (2000) 395–402.

[7] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes,* Scientiae Mathematicae, **1** (1998) 389–403.

[8] M. Ito, *Some classes of operators associated with generalized Aluthge transformation,* SUT J. Mathematics, **1**(1999), 149–165.

[9] M. Ito, *Several properties on class A including p-hyponormal and log-hyponormal operators,* Math. Inequalities and Appl., **2**(1999), 569–578.

[10] M. Ito and T. Yamazaki, *Relations between two operator inequalities* $(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}})^{\frac{r}{p+r}} \geq B^r$ *and* $A^p \geq (A^{\frac{p}{2}}B^rA^{\frac{p}{2}})^{\frac{p}{p+r}}$ *and their applications,* Integr. Equat. Oper. Th., **44**(2002), 442–450.

[11] S.M.Patel, K.Tanahashi, A.Uchiyama and M.Yanagida, *Quasi-normality and Fuglede-Putnam theorem for* $A(s,t)$ *operators,* preprint.

[12] C. R. Putnam, *An inequality for the area of hyponormal spectra,* Math. Z., **116**(1970), 323–330.

[13] K. Tanahashi, *Putnam's inequality for log-hyponormal operators,* Integr. Equat. Oper. Th., **48**(2004), 103–114.

[14] A. Uchiyama, *On the isolated points of spectrum of paranormal operators,* preprint.

[15] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *On the Riesz idempotent of class A operators,* Mathematical Inequalities and Applications, **5**(2002), 291–298.

[16] A. Uchiyama, K. Tanahashi and J. I. Lee, *Spectrum of class* $A(s,t)$ *operators,* Acta Sci. Math. (Szeged), **70**(2004), 279–287.

[17] D. Xia, *Spectral theory of hyponormal operatots.* Birkhauser Verlag, Boston, 1983.

MUNEO CHŌ
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KANAGAWA UNIVERSITY,
YOKOHAMA 221-8686, JAPAN
E-mail address: chiyom01@kanagawa-u.ac.jp

S.M. PATEL
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
SARDAR PATEL UNIVERSITY
VALLABH VIDYANAGAR 388 120, GUJARAT, INDIA
E-mail address: smpatel-32@yahoo.com

KÔTARÔ TANAHASHI
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TOHOKU PHARMACEUTICAL UNIVERSITY
SENDAI 981-8558, JAPAN
E-mail address: tanahasi@tohoku-pharm.ac.jp

ATSUSHI UCHIYAMA
SENDAI NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
SENDAI 989-3128, JAPAN
E-mail address: uchiyama@cc.sendai-ct.ac.jp